ΘΕΜΑ Γ.

Γ1 Θεωρούμε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$

Παρατηρούμε $f(0)=0$

$$f'(x)=2x\cdot e^{x^2}-2x=2x(e^{x^2}-1).$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{x^2}-1$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(0)=0$	$\nearrow$	

Έχουμε $f(x)\geq f(0)$.
το '=' ισχύει μόνο
για $x=0$ οπότε
μοναδική ρίζα 0.

Γ2 Η $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \overset{(Γ1)}{\Leftrightarrow} x=0$.

Επειδή η f είναι συνεχής τότε
η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε
καθένα από τα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

- Για $f(x)<0$, $x\in(-\infty,0)$ και $f(x)<0$, $x\in(0,+\infty)$
έχουμε $f(x)=-(e^{x^2}-x^2-1)$, $x\in\mathbb{R}$
- Για $f(x)<0$, $x\in(-\infty,0)$ και $f(x)>0$, $x\in(0,+\infty)$.

έχουμε
$$f(x)=\begin{cases}-(e^{x^2}-x^2-1), & x\in(-\infty,0)\\ 0, & x=0.\\ (e^{x^2}-x^2-1), & x\in(0,+\infty).\end{cases}$$

Τηλ.: 210-6219712 / 210-6218894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

• Για $f(x)>0$, $x\in(-\infty,0)$ και $f(x)<0$, $x\in(0,+\infty)$

έχουμε
$$f(x)=\begin{cases} (e^{x^2}-x^2-1), & x\in(-\infty,0)\\ 0, & x=0 \\ -(e^{x^2}-x^2-1), & x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

• Για $f(x)>0$, $x\in(-\infty,0)$ και $f(x)>0$, $x\in(0,+\infty)$

έχουμε $f(x)=(e^{x^2}-x^2-1)$, $x\in\mathbb{R}$

$\boxed{Γ3}$ $f''(x)=[2x(e^{x^2}-1)]'=2(e^{x^2}-1)+2x\cdot 2x\cdot e^{x^2}$

$=2(e^{x^2}-1)+4x^2\cdot e^{x^2}\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$

το '=' ισχύει μόνο για $x=0$.

Η f' είναι συνεχής στο $x=0$ οπότε

η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα

η f κυρτή στο $\mathbb{R}$

$\boxed{Γ4}$ Θεωρούμε $h(x)=f(x+3)-f(x)$, $x\in[0,+\infty)$

$h'(x)=f'(x+3)-f'(x)$.

Για $x+3>x \overset{x>0}{\underset{f'\uparrow}{\Longleftrightarrow}} f'(x+3)>f'(x) \Longleftrightarrow$

$f'(x+3)-f'(x)>0 \Longleftrightarrow h'(x)>0$ δηλ.

η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Άρα $f(|ημx|+3)-f(|ημx|)=f(x+3)-f(x) \Longleftrightarrow$

$h(|ημx|)=h(x) \overset{h}{\underset{1-1}{\Longleftrightarrow}} |ημx|=x \Longleftrightarrow$

$\boxed{x=0}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x\,dx + \int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x\,dx = \pi$

$\int_0^{\pi} f(x)\cdot(-\sigma\upsilon\nu x)'dx + \int_0^{\pi} (f'(x))'\eta\mu x\,dx = \pi$

$\left[-f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} + \cancel{\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx} + \left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi} - \cancel{\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx} = \pi$

$-f(\pi)\cdot\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\cdot\sigma\upsilon\nu 0 = \pi \Leftrightarrow \boxed{f(\pi)+f(0)=\pi}$ (1)

Θέτω $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$, $x\neq 0$

Αφού f συνεχής $f(0)=\lim_{x\to 0}(g(x)\cdot\eta\mu x) = 1\cdot 0 = 0$

άρα $\boxed{f(0)=0}$

(1) $\Longrightarrow$ $\boxed{f(\pi)=\pi}$

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right) = 1\cdot 1 = 1.$

Άρα $\boxed{f'(0)=1}$

Δ2) α) $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x \xrightarrow{\frac{d}{dx}}$

$f'(x)e^{f(x)} + 1 = f'(f(x))\cdot f'(x) + e^x$. (2)

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x_0 \xrightarrow{\Theta F} f'(x_0)=0$

(2) $\xrightarrow{x=x_0} 1 = e^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 0$ Άτοπο αφού

$f'(x_0) = f'(0) = 1$.

β) $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
f': συνεχής στο $\mathbb{R}$.
$f'(0) = 1 > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

άρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Τηλ.: 210-6219712 / 210-6218894 www.apolito.gr - e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

Δ3) Αφού f συνεχής και γνησίως αύξουσα

$$R_f = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$ άρα

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$ Άρα $$\lim_{x\to+\infty} \frac{ημx+συνx}{f(x)} = 0$$

ως μηδενική · φραγμένη.

$$\left|\frac{ημx+συνx}{f(x)}\right| = |ημx+συνx| \cdot \left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \left(|ημx|+|συνx|\right)\frac{1}{f(x)}$$

$$\leq \frac{2}{f(x)}.$$

$$-\frac{2}{f(x)} \leq \frac{ημx+συνx}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{f(x)}\right) = 0$$

Άρα $$\lim_{x\to+\infty}\frac{ημx+συνx}{f(x)} = 0.$$

Δ4) $1 \le x \le e^{\pi} \overset{\ln x \uparrow}{\iff}$

$0 \le \ln x \le \pi \iff f(0) \le f(\ln x) \le f(\pi)$.

$0 \le f(\ln x) \le \pi$

$0 \overset{①}{\le} \dfrac{f(\ln x)}{x} \overset{②}{\le} \dfrac{\pi}{x} \implies$

① → η ισότητα μόνο για $x = 1$

② → η ισότητα μόνο για $x = e^{\pi}$

$$\int_1^{e^{\pi}} 0\,dx < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}\,dx < \pi \int_1^{e^{\pi}} \frac{1}{x}\,dx$$

$$0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}\,dx < \pi(\ln e^{\pi} - \ln 1)$$

$$0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}\,dx < \pi^2.$$

Λόγω άσκησης Γ10 σχολικό

σελ 353